20/05/19

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{llllll}
u_1 & x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & & & = a_1 \\
u_2 & & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & & & = a_2 \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots \\
u_m & & & & x_{m1} + \dots + x_{mn} & = a_m \\
v_1 & x_{11} & + x_{21} & & + x_{m1} & = b_1 \\
v_2 & x_{12} & + x_{22} & & + x_{m2} & = b_2 \\
\vdots & & & & & \\
v_n & x_{1n} & + x_{2n} & & + x_{mn} & = b_n
\end{array}$$

$x_{ij} \geq 0$

(Δ)

$$\max \sum a_i u_i + \sum b_j v_j$$

$u_i + v_j \leq c_{ij}$

$u_i \in \mathbb{R}$

$v_j \in \mathbb{R}$

$\max \underline{b}' \underline{w}$ $\quad \underline{w} = \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$A' w$

$w \in \mathbb{R}^{n+m}$

Έστω $(\underline{u}, \underline{v})$ $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)'$ $\underline{v} = (v_1 \dots v_n)'$ μια εφικτή λύση του (Δ) και $\theta \in \mathbb{R}$

θέτουμε $u_i' = u_i - \theta \quad i = 1 \dots m$

$v_j' = v_j + \theta \quad j = 1 \dots n$

Τότε $(u_1', u_2', \dots, u_m', v_1', \dots, v_n')'$ είναι επίσης εφικτή λύση που δίνει την ίδια τιμή ($\mathbb{R}$) στην αντικειμενική συνάρτηση.

$u_i' + v_j' = u_i - \theta + v_j + \theta = u_i + v_j \leq c_{ij}$ (εφικτή λύση)

$$R' = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{i=1}^{n} b_j v_j' = \sum_{i=1}^{m} a_i (u_i - \theta) + \sum_{j=1}^{n} b_j (v_j + \theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j + \theta \left(\sum b_j - \sum a_i \right) = R$$

Εστω $\{\hat{x}_{ij} \quad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n\}$ μια εφικτη λυση του προβληματος μεταφορας.
Η $\{\hat{x}_{ij}\}$ ειναι αριστη αν υπαρχουν u_i $i=1,\dots,m$ και v_j $j=1,\dots,n$ τ.ω

$u_i + v_j = c_{ij}$ αν $\hat{x}_{ij} > 0$

$u_i + v_j \leq c_{ij}$ αν $\hat{x}_{ij} = 0$

Αν $\{\hat{x}_{ij}\}$ ειναι αριστη λυση τοτε το (D) εχει αριστη λυση.
Απο θεωρ. Συμπληρωματικης Χαλαροτητος ισχυουν οι σχεσεις:
$\{\hat{x}_{ij}\}$ εφικτη λυση $\quad \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij} = a_i \quad i=1,\dots,m$

$$\sum_{j=1}^{m} \hat{x}_{ij} = b_j \quad j=1,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\hat{R} = \sum\sum c_{ij}\hat{x}_{ij} = \sum\sum (u_i+v_j)\hat{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i\hat{x}_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j\hat{x}_{ij} =$$

$$= \sum u_i a_i + \sum b_j v_j$$

x'_{ij} μια αλλη εφικτη λυση του προβληματος

$R' = \sum\sum c_{ij}x'_{ij} \geq \sum\sum (u_i+v_j)x'_{ij}$ (απο (D) $u_i + v_j \leq c_{ij}$)

$= \sum u_i \sum x'_{ij} + \sum v_j \sum x'_{ij}$

$= \sum u_i a_i + \sum v_j b_j$

Επομενως $R' \geq \hat{R}$ αρα x_{ij} εφικτη λυση

—

Από μια εκφυλισμένη λύση πως θα πάω σε εφικτή λύση.

Άσκηση

Λύνεται η λύση από μέθοδο Vogel

	A_1	A_2	A_3	A_4	
E_1	19 / 5	[-32] 30 / 0	[-62] 50 / 0	10 / 2	7
E_2	[-1] 70 / 0	30 / 0	40 / 7	60 / 2	9
E_3	[-11] 40 / 0	8 / 8	[-70] 70 / 0	20 / 10	18
Σύνολο	5	8	7	14	34

$m+n-1=6$

Βασικές Μεταβλητές

$u_1+v_1=19$

$u_1+v_4=10$

$u_2+v_3=40$

$u_2+v_4=60$

$u_3+v_2=8$

$u_3+v_4=20$

i) Παίρνω όλα όσα είναι βασικά τετράγωνα, όλα όσα έχουν τιμή

ii) Θέτουμε ένα οποιοδήποτε $=0$ π.χ. $v_4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_4=0,\ u_3=20,\ v_2=-12,\ u_2=60$

$v_3=-20,\ u_1=10,\ v_1=9$

Εξισώνω τα κόστη αυτών που δεν είναι 0

Γράφω αυτά που βρήκα γύρω από το πίνακα

u \ v	9	12	-20	0
10	19 / 5	[-32] 30 / 0	[-63] 50 / 0	10 / 2
60	[-1] 70 / 0	[18] 30 / + 0	40 / 7	60 / − 2
20	[-11] 40 / 0	8 / − 8	[-70] 70 / 0	20 / + 10

iii) Γράφουμε στα μη βασικά τετράγωνα $\delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$

iv) Σταματάμε αν όλα τα $\delta_{ij}<0$. Αν όχι:

v) Ξεκινώντας από το θετικό δ_{ij} τραβάμε γραμμές βήμα-βήμα προς βασικά τετράγωνα μόνο και τελειώνουμε τη γραμμή στο μη βασικό τετράγωνο που ξεκινησαμε (οριζοντιες και καθετες γραμμες). Ξεκινωντας απ' το (+) στο μη βασικο βαζουμε (−) και και (+) εναλλαξ στα επομενα (στις γωνιες)

Καθε γραμμη μπορει να εχει μονο ενα (+) και ενα (−)

Στο παραδειγμα θελω να κανω τη x_{22} βασικη

$\theta_0 = \min\{x_{ij}, -\}$ $\min\{2, 3\} = 2$

$$x_{ij}' = \begin{cases} x_{ij} + \theta_0 & \text{, για τετραγωνο με } + \\ x_{ij} - \theta_0 & \text{, για τετραγ με } (-) \\ x_{ij} & \text{, για τα υπολοιπα} \end{cases}$$

u \ v	29	8	18	20
-10	5 (19)	[-32] 0 (30)	[-42] 0 (50)	2 (10)
22	[-19] 0 (70)	2 (30)	7 (40)	[-18] 0 (60)
0	[-11] 0 (40)	6 (8)	[-52] 0 (70)	12 (20)

$\delta_{ij} \le 0$

και ξανα οριζω τα u_i, v_i και το βρισκω τοσο (•)

$R_1 = R_0 - \theta_0 \delta_{22}$

Άσκηση

u_i \ v_j	B_1 3	B_2 4	B_3 5	B_4 1		B_5 2
0	0) 3 — 0	-2) 6 — 0	2 — 0	1 — 15	20	2 — 5
-1	-4) 6 — 0	3 — 25	4 — 15	-7) 7 — 0	40	-3) 4 — 0
3	6 — 10	2) 5 — 0	8 — 20	-5) 9 — 0	50	5 — 20
	10	25	35	15	110	25

Προσθέτω ακόμα ένα στάδιο.

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma a_i = 110 \\ \Sigma b_i = 35\end{array}\right\} \text{Διαφορά } 25$$

Βασικες Μεταβλητες: $u_i + v_j = c_{ij}$

Για μη βασικες: $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

$\max\{\delta_{ij},\ \delta_{ij} > 0\} = \max\{3, 2\} = 3$

$\theta_0 = \min\{5, 20\} = 5$ αρα προσθαφαιρω το 5

και θα γινουν

5	0
15	25

και ξανα το ιδιο βημα μεχρι ολα τα $\delta_{ij} \leq 0$

Ασκηση:

(*) Στην εξισορροπητικη τη μια φορα βαζω να προσθεσουμε στηλη την αλλη γραμμη

	B_1	B_2	B_3	
A_1	23	24	23	5
A_2	23	25	24	8
A_3	24	25	23	7
A_4	25	23	25	6
A_5	5	15	20	1
	8	9	10	27

$\Sigma a_i = 26$ $\Rightarrow$ προσθετω εναν υποθετικο σταθμο παραγωγης

$\Sigma b_j = 27$

Άσκηση

30	52	76
42	36	30
55	43	60

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο στρατιώτης } i \text{ πάρει τη θέση } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\max\{30X_{11} + 52X_{12} + \dots + 60X_{33}\}$$

$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$

$X_{12} + X_{22} + X_{23} = 1$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} \; 1$

$C = C_{ij}$ min

Ο Ουγγρικός Αλγόριθμος

1) Αφαιρούμε το μεγαλύτερο c_{ij} από κάθε c_{ij} της αντιστ. γραμμής. Στο νέο tableau αφαιρούμε το μεγαλύτερο c_{ij} κάθε στήλης από κάθε c_{ij} της αντίστοιχης στήλης.

2) Με το ελάχιστο αριθμό ευθειών (οριζοντίων και καθέτων) διαγράφουμε τα μηδενικά του τελευταίου tableau.
Αν $r = m$ τότε το αντίστοιχο tableau δίνει την άριστη λύση.
Αν $r < m$ πάμε στο επόμενο βήμα.

3) Αφαιρούμε το μεγαλύτερο μη διαγεγραμμένο c_{ij} από κάθε μη διαγεγραμμένο c_{ij} και το προσθέτουμε στα c_{ij} που είναι στη διασταύρωση των 2 ευθειών.

4) Επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Λυση άσκησης

30	52	76
42	36	30
55	48	60

$\rightsquigarrow$

-46	-24	0
-33	-44	0
-5	-12	0

$\rightsquigarrow$

-41	-12	0
-33	-32	0
0	0	0

$r = 2 < m = 3$

-29	0*	0
-21	-20	0*
0*	0	12

0 υπαλ 1 στη θεση 2
0 2 στη 3
0 3 στη 1

Άσκηση

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
Ελευθερο-	-61	-53	-53	-54	-62
Μπιπιο	-63	-65	-61	-57	-58
Προσθιο	-57	-59	-56	-61	-62
Πεταλουδα	-58	-60	-56	-55	-57
	0	0	0	0	0

Ποια ομάδα θα χρησιμοποιήσει για να κανει το λιγοτερο χρόνο.

⟵ για το θελω τετραγωνο.

Τα κανω όλα (−)

-3	-5	0	-1	-9
-6	-3	-4	0	-1
-1	-3	0	-5	-6
-3	-5	-1	0	-2
0	0	0	0	0

$\rightsquigarrow$

-7	-4	0*	-8	-3
-5	-7	-4	0	0*
0*	-2	0	-5	-5
-2	-4	-1	0*	-1
0	0*	-1	-1	0

αυτοι δε γινεται εξω

Άσκηση

1) 3 υποψήφιοι για 4 θέσεις:

A_1	12	40	60	35
A_2	43	30	75	60
A_3	55	62	18	40
A_4	0	0	0	0

2) 3 άτομα για 4 εργασίες. Το κάθε άτομο μπορεί να χρησιμοποιηθεί 2 φορές

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	-3,5	-2	-4,3	-3	0	0
A_2	-5	-2,8	-4	-3,6	0	0
A_3	-4	-3	-5	-4	0	0

Πώς πρέπει να κατανεμηθούν τα άτομα για να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος εκτέλεσης των εργασιών;

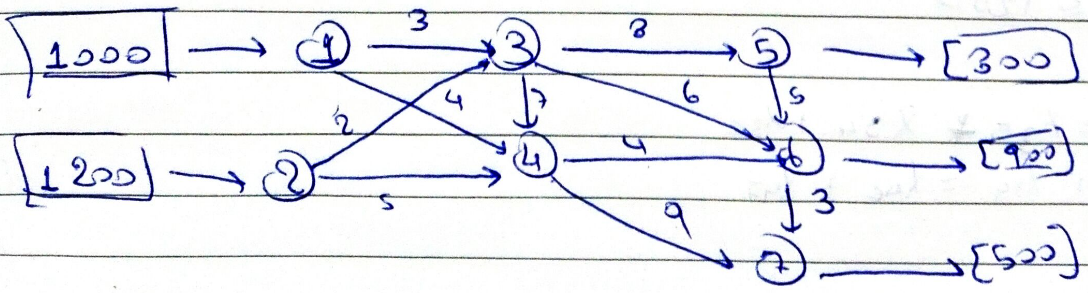
A_4	-3,5	-2	-4,3	-3	0	0
A_5	-5	-2,8	-4	-3,6	0	0
A_6	-4	-3	-5	-4	0	0

(*) Βάζουμε σε όλα (−) διότι είναι προβλ. ελαχιστοποίησης

—

Εκτός Εξεταστικής

Πρόβλημα Μεταφόρτωσης



① και ② σταθμοί παραγωγής

③, ④, ⑤, ⑥ σταθμοί προορισμοί
⑦ τελικός σταθμός

S: Προσφορά γνωστών σταθμών παραγωγής
S+: Καταγεγραμμένη προσφορά (προσφορά)
S+: Καταγεγραμμένη ζήτηση (ζήτηση)
↳ Σταθμοί ζήτησης

	3	4	5	6	7	
1	3	4	M	M	M	1000
2	2	5	M	M	M	1200
3	0	7	8	6	M	2200
4	M	0	M	4	5	2200
5	M	M	0	5	M	2200
6	M	M	M	0	4	2200
	2200	2200	2200 +800	2200 +900	2200 +500	

Τα M είναι πολύ μεγάλοι αριθμοί τα βάζουμε στις διαδρομές που δεν υπάρχουν (δεν μπορούν να γίνουν)

$\min 3x_{13} + 4x_{14} + \dots + 3x_{67}$

$x_{13} + x_{14} \leq 1000$

$x_{23} + x_{24} \leq 1200$

$x_{13} + x_{23} = x_{35} + x_{34} + x_{36}$

$x_{24} + x_{14} + x_{34} = x_{46} + x_{47}$

$x_{35} = 800 + x_{56}$

$x_{36} + x_{46} + x_{56} = x_6 + 900$ $\quad x_{47} + x_{67} = 500$